

## Question Bank

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম ( Elective Course )

**অঙ্ক ( Mathematics )**

অষ্টম পত্র ( 8th Paper )

**Mathematical Analysis – II : EMT-08**

1. Consider two partitions P and Q of the closed interval  $[0,1]$  as follows :-  $P : \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ ,  $Q : \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

Is Q a refinement of P ?

নীচে  $[0,1]$  বদ্ধ অন্তরালে দুটি বিভাজন P এবং Q দেওয়া হলো -

$$P : \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}, \quad Q : \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

এখানে Q কে P এর একটি সূক্ষ্ম বিভাজন বলা যাবে কি ?

2. If  $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [a, b]$  and if  $P : \{a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh = b\}$  be a partition of  $[a, b]$  then find the supremum and infimum of  $f(x)$  in the  $r$ -th subinterval.

যদি  $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [a, b]$  হয় এবং  $P : \{a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh = b\}$ ,  $[a, b]$  অন্তরের একটি বিভাজন হয় তাহলে  $f(x)$  এর  $r$ -তম উপান্তরে লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা নির্ণয় করুন।

3. If  $f : [0,1] \rightarrow R$  defined as

$$f(x) = x \quad \forall x \in [0,1] \cap Q$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

Then find  $\int_0^1 f(x) dx$  and  $\int_0^1 f(x) dx$

$f : [0,1] \rightarrow R$  নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = x \quad \forall x \in [0,1] \cap Q$$

$$= 0 \quad \text{অন্যথায়}$$

তাহলে  $\int_0^1 f(x) dx$  এবং  $\int_0^1 f(x) dx$  এর মান নির্ণয় করুন।

4. If  $f(x)$  is defined in  $[0,1]$  as

$$f(x) = (-1)^{r-1}, \quad \frac{1}{r+1} < x \leq \frac{1}{r}, \quad r = 1,2,3 \dots \dots$$

$$= 0, \quad x = 0$$

then prove that  $f(x)$  is integrable in  $[0,1]$ .

$[0,1]$  অন্তরে  $f(x)$  এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = (-1)^{r-1}, \quad \frac{1}{r+1} < x \leq \frac{1}{r}, \quad r = 1,2,3 \dots \dots$$

$$= 0, \quad x = 0$$

তাহলে প্রমাণ করুন যে  $f(x)$ ,  $[0,1]$  অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

5. Let  $f(x)$  be defined on the interval  $[0,1]$  as follows :-

$$f(x) = 1 \text{ when } x \text{ is rational}$$

$$= -1 \text{ } x \text{ is irrational}$$

Prove that  $f(x)$  is not integrable in the interval  $[0, 1]$  but  $|f(x)|$  is integrable.

$[0,1]$  অন্তরে  $f(x)$  অপেক্ষকটি নিম্নোক্ত ভাবে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = 1 \text{ যখন } x \text{ মূলদ}$$

$$= -1 \text{ যখন } x \text{ অমূলদ}$$

তাহলে প্রমাণ করুন যে  $f(x)$ ,  $[0,1]$  অন্তরে সমাকলনযোগ্য নয় কিন্তু  $|f(x)|$ ,  $[0,1]$  অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

6. Prove that the improper integral  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  is divergent.

প্রমাণ করুন যে অসংসারী সমাকলন  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  অপসারী।

7. If  $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin n\theta d\theta}{\sin \theta}$  then prove that  $I_n = \pi$  if  $n$  is an odd positive integer.

$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin n\theta d\theta}{\sin \theta}$  হলে প্রমাণ করুন যে  $n$  অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে  $I_n = \pi$  হবে।

8. Prove that the improper integral  $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$  is convergent if  $m > 0$  and  $n > 0$ .

প্রমাণ করুন যে  $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$  এই অযথার্থ সমাকলনটি অভিসারী হবে, যদি  $m > 0$  এবং  $n > 0$  হয়।

9. Prove that  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  is an improper integral of second kind.

প্রমাণ করুন যে  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  একটি দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলন।

10. Prove that  $\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$ .

প্রমাণ করুন যে  $\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$ .

11. Prove that the series is  $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i(i+1)}$  converges to 1.

প্রমাণ করুন যে  $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i(i+1)}$  এই শ্রেণীটি অভিসারী এবং যোগফল 1.

12. Prove that the series  $\sum_{k=0}^\infty (1-x)x^k$ , for  $0 \leq x \leq 1$  is absolutely convergent but not uniformly convergent.

প্রমাণ করুন যে  $\sum_{k=0}^\infty (1-x)x^k$  শ্রেণীটি  $[0,1]$  অন্তরালে নিঃশর্তভাবে অভিসারী কিন্তু সমভাবে অভিসারী নয়।

13. Prove that the radius of convergence of the series

$$\frac{1}{3} - x + \frac{x^2}{3^2} - x^3 + \frac{x^4}{3^4} - x^5 + \frac{x^6}{3^6} - \dots \text{ is } 1.$$

দেখাও যে  $\frac{1}{3} - x + \frac{x^2}{3^2} - x^3 + \frac{x^4}{3^4} - x^5 + \frac{x^6}{3^6} - \dots$  এই শ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ হল 1.

14. Find the Fourier constants of the function  $f(x) = x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ).

$f(x) = x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) এই অপেক্ষকের ফুরিয়ার ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয় করুন।

15. Prove that the integral  $\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$  is an improper integral of second kind and is not convergent.

প্রমাণ করুন যে  $\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$  সমাকলনটি একটি দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলন যা অভিসারী নয়।